Programma di Analisi Matematica 2

Corso di Studi in Matematica

A.A. 2020/21

1. Integrali impropri del primo tipo
2. Integrali impropri del secondo tipo
3. Teorema del confronto per gli integrali impropri
4. Convergenza puntuale
5. Convergenza uniforme
6. Teorema sulla continuità della funzione limite
7. Teorema sullo scambio dei limiti
8. Teorema sul criterio di Cauchy uniforme
9. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale
10. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata
11. Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata sotto ipotesi generali (dimostrazione facoltativa)
12. Teorema del Dini sulla convergenza uniforme sotto ipotesi di monotonia
13. Convergenza uniforme sotto ipotesi di monotonia rispetto al punto
14. Convergenza puntuale ed uniforme di una serie di funzioni
15. Convergenza totale di una serie di funzioni
16. Criteri di Cauchy puntuale ed uniforme per la convergenza di una serie di funzioni
17. Relazione fra la convergenza totale, uniforme e puntuale di una serie di funzioni
18. Teorema sulla continuità di una somma di una serie di funzioni
19. Teorema sull'integrazione di una serie di funzioni
20. Teorema di derivazione per le serie di funzioni.
21. Serie di potenze
22. Raggio di convergenza delle serie di potenze
23. Teoremi sul raggio di convergenza
24. Criterio di Cauchy-Hadamard
25. Criterio di D'Alambert
26. Teorema sul raggio di convergenza della serie derivata
27. Teorema di derivazione ed integrazione delle serie di potenze
28. Serie di Taylor

29. Teoremi sulla convergenza della serie di Taylor e la sviluppabilità
30. Funzioni periodiche
31. Introduzione alle serie di Fourier
32. Teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier (senza dimostrazione)
33. Teorema sulla integrazione termine a termine della serie di Fourier (senza dimostrazione)
34. Diseguaglianza di Bessel (senza dimostrazione)
35. Teorema sulla convergenza uniforme della serie di Fourier (senza dimostrazione)
36. Introduzione agli spazi metrici
37. Esempi: distanza euclidea, metriche equivalenti su $\mathbb{R}^n$, metriche sullo spazio delle funzioni continue (nel caso di $\mathbb{R}^n$ dimostrazione facoltativa della disuguaglianza triangolare).
38. Prime proprietà degli spazi metrici
39. Intorni circolari
40. Cenni di topologia, definizione di topologia indotta da una metrica
41. Insiemi aperti in uno spazio metrico
42. Proprietà degli insiemi aperti (senza dimostrazione)
43. Insiemi chiusi in uno spazio metrico
44. Proprietà degli insiemi chiusi
45. Definizioni di intorno di un punto, punti interni, interno di un insieme, punti di accumulazione e chiusura di un insieme
46. Proprietà dell'interno e della chiusura di un insieme
47. Definizioni di punto di frontiera, frontiera di un insieme, dominio
48. Insiemi limitati
49. Diametro di un insieme limitato
50. Limiti di successioni in uno spazio metrico
51. Unicità del limite di una successione
52. Limiti di funzioni in spazi metrici
53. Limiti in $\mathbb{R}^n$ e convergenza componente per componente
54. Definizione di funzione continua in spazi metrici
55. Definizione di funzione sequenzialmente continua in spazi metrici
56. Teorema di equivalenza tra continuità e continuità sequenziale (senza dimostrazione)
57. Continuità delle funzioni Lipschitziane
58. Definizione di funzione distanza di un punto da un insieme

59. Lipschitzianità e continuità della funzione distanza di un punto da un insieme
60. Teorema di separazione di due insiemi chiusi e disgiunti mediante una funzione continua
61. Definizione di spazio vettoriale
62. Lo spazio vettoriale delle funzioni continue
63. Definizioni di norma e di spazio normato
64. Esempi di spazi normati
65. Diseguaglianza di Young (dimostrazione facoltativa)
66. Diseguaglianza di Hölder (dimostrazione facoltativa)
67. Diseguaglianza di Minkowski (dimostrazione facoltativa)
68. "p-norma" su $\mathbb{R}^n$ e sue proprietà
69. Alcune norme sullo spazio delle funzioni continue
70. Metrica indotta da una norma
71. Invarianza per traslazione e omogeneità della metrica indotta da una norma
72. Successioni di Cauchy in spazi metrici
73. Spazi metrici completi e spazi di Banach
74. Esempi di spazi di Banach
75. Esempi di spazi non completi
76. Teorema delle contrazioni (o di Banach-Caccioppoli)
77. Lemma di Mc Shane (dimostrazione facoltativa)
78. Insiemi compatti in uno spazio metrico
79. Caratterizzazione dei compatti in $\mathbb{R}^n$
80. Teorema di Weierstrass generalizzato
81. Norme equivalenti
82. Teorema di equivalenza delle norme in $\mathbb{R}^n$
83. Funzioni uniformemente continue
84. Teorema di Cantor generalizzato
85. Insiemi connessi, connessi per poligonali
86. Teorema di equivalenza tra aperti connessi e aperti connessi per poligonali in $\mathbb{R}^n$ (senza dimostrazione)
87. Teorema del valor medio in $\mathbb{R}^n$
88. Funzioni reali in più variabili
89. Definizione di derivata parziale, derivata direzionale e differenziale

90. Derivate successive
91. Teorema di Schwarz
92. Teorema del differenziale
93. Esempi e controesempi su derivabilità e continuità
94. Differenziabilità e continuità
95. Teorema sulla derivata direzionale di una funzione differenziabile
96. Definizione di curva in $\mathbb{R}^n$
97. Teorema di derivazione della funzione composta
98. Teorema di differenziabilità della funzione composta (senza dimostrazione)
99. Grafico di funzioni in due variabili
100. Curve di livello
101. Forme quadratiche
102. Definizioni di matrice definita, semidefinita e indefinita
103. Teorema di caratterizzazione delle matrici definite (senza dimostrazione)
104. Teorema di caratterizzazione delle matrici 2x2 (senza dimostrazione)
105. Teorema delle funzioni a gradiente nullo
106. Estremi relativi
107. Teorema: massimi e minimi relativi: condizione necessaria del primo ordine
108. Definizione di matrice Hessiana
109. Teorema: massimi e minimi relativi: una condizione necessaria del secondo ordine
110. Corollario: massimi e minimi relativi: una condizione necessaria sulle derivate pure
111. Teorema: massimi e minimi relativi: una condizione sufficiente
112. Definizione di Hessiano
113. Teorema: massimi e minimi relativi in $\mathbb{R}^2$: una condizione sufficiente
114. Formula di Taylor in $\mathbb{R}^n$
115. Teorema: formula di Taylor col resto di Lagrange (caso $n = 1$, $n = 2$ con dimostrazione e $n = k$ senza dimostrazione)
116. Teorema: formula di Taylor del secondo ordine col resto di Peano (dimostrazione facoltativa)
117. Definizioni di insieme convesso e funzione convessa
118. Teorema: criterio di convessità per le funzioni differenziabili (dimostrazione facoltativa)
119. Teorema: criterio di convessità per funzioni C^2

120. Definizione di cono e di funzione omogenea
121. Locale Lipshitzianità (senza dimostrazione)
122. Teorema di Eulero (dimostrazione facoltativa)
123. Teorema sul gradiente di una funzione omogenea
124. Funzioni definite mediante integrali
125. Continuità delle funzioni definite mediante integrali (dimostrazione facoltativa)
126. Differenziabilità delle funzioni definite mediante integrali (senza dimostrazione)
127. Funzioni armoniche
128. Principio del massimo per funzioni armoniche (senza dimostrazione)
129. Teorema di unicità per il problema di Dirichlet
130. Funzioni a valori vettoriali
131. Continuità e derivabilità delle funzioni vettoriali
132. Teorema di differenziabilià per le funzioni vettoriali (senza dimostrazione)
133. Teorema di rappresentazione del gradiente delle funzioni composte vettoriali (senza dimostrazione)
134. Modelli di crescita e decadimento
135. Generalità sulle equazioni e sui sistemi differenziali
136. Interpretazione geometrica delle equazioni differenziali ordinarie
137. Problemi di Cauchy
138. Lemma di equivalenza fra le soluzioni di un problema di Cauchy e le soluzioni dell'equazione di Volterra associata
139. Dimostrazione del Teorema di esistenza ed unicità locale
140. Le iterate di Picard
141. Regolarità delle soluzioni
142. Teorema delle contrazioni per le iterate (senza dimostrazione)
143. Miglioramento del teorema di esistenza ed unicità locale (dimostrazione facoltativa)
144. Problema del prolungamento delle soluzioni
145. Soluzione massimale
146. Teorema di Peano (senza dimostrazione)
147. Teorema di esistenza ed unicità globale
148. Lemma di sublinearità
149. Teorema di abbandono del compatto per la soluzione massimale (senza dimostrazione)

150. Teorema di limitazione a priori delle soluzioni

151. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Testi consigliati: Paolo Marcellini e Carlo Sbordone, *Analisi matematica vol. 1*, Liguori, (1998); Jaures P. Cecconi e Guido Stampacchia, *Analisi matematica Volume I: Funzioni di una variabile*, Liguori, (1974); Nicola Fusco, Paolo Marcellini e Carlo Sbordone, *Analisi matematica vol. 2*, Liguori, (1996); Paolo Marcellini e Carlo Sbordone, *Esercitazioni di matematica vol. 1/2*, Liguori, (1995); Paolo Marcellini e Carlo Sbordone, *Esercitazioni di matematica vol. 2/1*, Liguori, (1995); Paolo Marcellini e Carlo Sbordone, *Esercitazioni di matematica vol. 2/2*, Liguori, (1995); Jaures P. Cecconi e Guido Stampacchia, *Esercizi e problemi di analisi matematica vol. 1*, Liguori, (1979); Carlo D. Pagani e Sandro Salsa, *Analisi matematica 2*, Masson, (1998); M. Braun, *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics* (Texts in Applied Mathematics, Vol. 11), Springer (1992).